Journal of Geometry and Physics 13 (1994) 254–258
North-Holland

JOURNAL OF GEOMETRY AND PHYSICS

Structures homogènes lorentziennes sur le groupe de Heisenberg I

N. Rahmani et S. Rahmani

Laboratoire de Mathématiques et Informatique, 4, rue des Frères Lumière, 68093 Mulhouse Cedex, France

Reçu le 7 décembre 1992
(Revisé le 13 mai 1993)

We determine all homogeneous lorentzian structures on the three-dimensional Heisenberg group H_3. We deduce that it is a reductive homogeneous lorentzian manifold for any left invariant metric.

Keywords: *homogeneous lorentzian structures*
1991 MSC: 11 E 57, 14 L 35, 53 C 50, 81 R 99

Introduction

Dans la réf. [2], Gadéa et Oubinã montrent que le théorème d'Ambrose–Singer ne peut être généralisé au cas pseudo-riemannnien que si l'espace homogène est réductif. Dans cette note, on détermine toutes les structures homogènes lorentziennes du groupe de Heisenberg H_3, en utilisant la classification donnée dans la réf. [3] des métriques de Lorentz invariantes à gauche sur ce groupe. En utilisant la caractérisation de Gadéa et Oubinã, on en déduit que le groupe de Heisenberg H_3 est homogène réductif pour toute métrique de Lorentz invariante à gauche.

Nous présentons ci-après une première partie de notre travail, qui sera complétée par une deuxième partie, où nous généraliserons au cas pseudo-riemannien le théorème de Tricerri et Vanhecke [4] relatif à la caractérisation des espaces homogènes naturellement réductifs.

1. Préliminaires

Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne de classe C^∞. Soient ∇ la connexion de Lévi-Cività de g et R le tenseur the courbure.

SSDI 0393-0440(93)E0041-M

Définition 1.1. Une structure homogène pseudo-riemannienne sur (M, g) est un tenseur T de type $(1, 2)$ sur M, telle que la connexion $\tilde{\nabla} = \nabla - T$ vérifie

(i) $\tilde{\nabla} g = 0$,

(ii) $\tilde{\nabla} R = 0$,

(iii) $\tilde{\nabla} T = 0$.

Dans le cas riemannien, le tenseur T caractérise les espaces homogènes, c'est le théorème d'Ambrose–Singer [1]. Dans la réf. [2], Gadéa et Oubinã étudient les structures homogènes pseudo-riemanniennes. Ils démontrent le théorème suivant [2, th. 1, p. 459]:

Théorème 1.2. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne complète, connexe et simplement connexe. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) (M, g) admet une structure homogène pseudo-riemannienne.

(ii) (M, g) est une variété pseudo-riemannienne homogène réductive.

On rappelle également la classification des métriques de Lorentz sur H_3, donnée dans la réf. [3] (th. 4.1).

Théorème 1.3. *Toute métrique de Lorentz invariante à gauche sur le groupe de Heisenberg H_3 est isomorphe, á automorphisme de l'àgèbre de Lie h_3 près, à l'une des métriques de Lorentz suivantes:*

$$g_1 = -\lambda^{-2}\,\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + (x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}z)^2$$

$$g_2 = -\lambda^{-2}\,\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 - (x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}z)^2, \quad \lambda \neq 0$$

$$g_3 = \mathrm{d}x^2 + (x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}z)^2 - [(1-x)\,\mathrm{d}y - \mathrm{d}z]^2 .$$

Remarque. Cette classification est équivalente à une classification à isométries près d'après le théorème de Wilson [5].

2. Structures homogènes lorentziennes sur H_3

On rappelle que le groupe de Heisenberg H_3 de dimension trois est le sous-groupe de $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ formé par les matrices du type

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considérons

$$g_1 = -\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + (x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}z)^2, \tag{2.1}$$

la métrique de Lorentz invariante à gauche sur H_3. L'algèbre de Lie de H_3 a une base pseudo-orthonormale constituée de

$$e_1 = \partial/\partial z\,, \qquad e_2 = \partial/\partial y - x\,\partial/\partial z\,, \qquad e_3 = \partial/\partial x\,, \tag{2.2}$$

pour laquelle

$$[e_2, e_3] = e_1\,, \qquad [e_3, e_1] = 0\,, \qquad [e_2, e_1] = 0\,;$$

la base duale est donnée par

$$\omega_1 = x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}z\,, \qquad \omega_2 = \mathrm{d}y\,, \qquad \omega_3 = \mathrm{d}x\,; \tag{2.3}$$

les formes de connexion sont déterminées par

$$g(\nabla_X e_i, e_j) = \omega_{ij}(X)\,;$$

on obtient

$$\omega_{12} = \tfrac{1}{2}\omega_3\,, \qquad \omega_{13} = -\tfrac{1}{2}\omega_2\,, \qquad \omega_{23} = -\tfrac{1}{2}\omega_1\,. \tag{2.4}$$

D'autre part, le tenseur de Ricci est donné par

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^{3} \epsilon_i g_1(R(X, e_i)Y, e_i)\,, \quad X, Y \in \mathscr{X}(H_3)\,,$$

où $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ et $\epsilon_3 = -1$. Ses composantes sont alors

$$\rho_{11} = \rho_{33} = \tfrac{1}{2}\,, \qquad \rho_{22} = -\tfrac{1}{2}\,, \qquad \rho_{ij} = 0\,, \quad i \neq j\,. \tag{2.5}$$

A présent, nous allons montrer que (H_3, g_1) possède une infinité de structures homogènes lorentziennes T_α, $\alpha \in \mathbb{R}$, non isomorphes. Au lieu de considérer les tenseurs T de type $(1, 2)$, on travaille avec des tenseurs de type $(0, 3)$ donnés par l'isomorphisme

$$T(X, Y, Z) = g_1(T(X, Y), Z)\,, \quad X, Y, Z \in \mathscr{X}(H_3)\,.$$

On a le théorème

Théorème 2.1. *Soit (H_3, g_1) le groupe de Heisenberg muni de la métrique de Lorentz (2.1). Alors toutes les structures homogènes lorentziennes sont données par*

$$T_\alpha = \alpha\omega_1 \otimes (\omega_2 \wedge \omega_3) + \omega_2 \otimes (\omega_3 \wedge \omega_1) + \omega_3 \otimes (\omega_1 \wedge \omega_2)\,, \quad \alpha \in \mathbb{R}\,, \tag{2.6}$$

où ω_i, $i = 1, 2, 3$, sont les formes données par (2.3).

Preuve. On doit trouver un tenseur T de type $(1, 2)$ vérifiant les conditions (i)–(iii) de la définition 1.1. On considère le tenseur T de type $(0, 3)$ correspondant. La condition(i) est équivalente à $T(X, Y, Z) = -T(X, Z, Y)$ pour X, Y, $Z \in \mathscr{X}(H_3)$. Comme (H_3, g_1) est de dimension trois, la condition $\tilde{\nabla}R = 0$ est équivalente à $\tilde{\nabla}_\rho = 0$, où ρ est le tenseur de Ricci, ou encore

$$(\tilde{\nabla}_X \rho)(Y, Z) = -\rho(T(X, Y), Z) - \rho(Y, T(X, Z)) \tag{2.7}$$

pour tous X, Y, $Z \in \mathscr{X}(H_3)$. D'après (2.5) la base $\{e_1, e_2, e_3\}$ diagonalise ρ; (2.7) est alors équivalent à

$$(\epsilon_j \rho_{jj} - \epsilon_i \rho_{ii})[\omega_{ij}(X) - T(X, e_i, e_j)] = 0 ; \tag{2.8}$$

utilisant (2.5) et (2.4), (2.8) devient

$$T(X, e_1, e_3) = -\tfrac{1}{2}\omega_2 , \qquad T(X, e_1, e_2) = \tfrac{1}{2}\omega_3 .$$

Ainsi, on peut écrire

$$T = \omega \otimes (\omega_2 \wedge \omega_3) + \omega_2 \otimes (\omega_3 \wedge \omega_1) + \omega_3 \otimes (\omega_1 \wedge \omega_2) . \tag{2.9}$$

A présent, on utilise la condition $\tilde{\nabla} T = 0$ pour déterminer la 1-forme $\omega = \sum_i \alpha_i \omega_i$, $\alpha_i \in C^\infty(H_3)$. On a

$$\tilde{\nabla}_X \omega_1 = 0 , \quad \tilde{\nabla}_X \omega_2 = [-\tfrac{1}{2}\omega(X) - \tfrac{1}{2}\omega_1(X)]\omega_3 ,$$
$$\tilde{\nabla}_X \omega_3 = [-\tfrac{1}{2}\omega(X) - \tfrac{1}{2}\omega_1(X)]\omega_2 . \tag{2.10}$$

Utilisant (2.9) et (2.10), on obtient

$$\tilde{\nabla}_X T = \tilde{\nabla}_X \omega \otimes (\omega_2 \wedge \omega_3) . \tag{2.11}$$

Ainsi $\tilde{\nabla}_X T = 0$ est équivalente à $\tilde{\nabla}_X \omega = 0$.

On obtient alors le système

$$X(\alpha_1) = 0 , \qquad X(\alpha_2) = \alpha_3 [\tfrac{1}{2}\omega_1(X) + \tfrac{1}{2}\omega(X)] ,$$
$$X(\alpha_3) = \alpha_2 [\tfrac{1}{2}\omega_1(X) + \tfrac{1}{2}\omega(X)] . \tag{2.12}$$

Il s'en suite que α_1 est constante. D'autre part, les conditions d'intégrabilité

$$(XY - YX - [X, Y])(\alpha_i) = 0 , \quad i = 2, 3 ,$$

et (2.12) impliquent

$$\alpha_2 \, \mathrm{d}[(\omega + \tfrac{1}{2}\omega_1)] = 0 , \qquad \alpha_3 \, \mathrm{d}[(\omega + \tfrac{1}{2}\omega_1)] = 0 . \tag{2.13}$$

One obtient $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ ou $\mathrm{d}(\omega + \tfrac{1}{2}\omega_1) = 0$. Dans ce dernier cas, on peut écrire

$$\omega + \tfrac{1}{2}\omega_1 = \mathrm{d}f ,$$

où f est une fonction de classe C^∞. Il en résulte que

$$\alpha_1 + \tfrac{1}{2} = e_1(f) , \qquad \alpha_2 = e_2(f) , \qquad \alpha_3 = e_3(f) . \tag{2.14}$$

Ainsi $e_1(f)$ est constante. D'autre part, (2.12) implique

$$X(e_2(f)) = e_3(f) \, \mathrm{d}f(X) , \qquad X(e_3(f)) = e_2(f) \, \mathrm{d}f(X) , \tag{2.15}$$

et comme

$$[e_2, e_3] = e_1 , \qquad [e_3, e_1] = 0 , \qquad [e_2, e_1] = 0 , \tag{2.16}$$

on a nécessairement $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Corollaire 2.2. *Pour toute métrique de Lorentz g invariante à gauche sur H_3, l'espace (H_3, g) est homogène réductif.*

Preuve. D'après le thérème 1.3, toute métrique de Lorentz invariante à gauche sur H_3 est équivalente à l'une des métriques g_1, g_2 ou g_3. Il suffit de prouver la propriété pour $g = g_1$ ($\lambda = 1$); la démonstration étant analogue pour $g = g_2$, on l'ométtra. Si $g = g_3$, c'est évident car (H_3, g_3) est une variété plate d'après le théorème 4.1 dans la réf. [3].

Or d'après le Théorème 2.1, (H_3, g_1) possède une infinité de structures homogènes lorentziennes. Il en résulte que (H_3, g_1) est homogène réductive en vertu du théorème 1.2.

Remarque. Ces structures homogènes permettent de retrouver tous les groupes transitifs d'isométries et donc de donner toutes les représentations du groupe de Heisenberg en tant qu'espace quotient (voir la réf. [4]).

Nous sommes reconnaissants au Professeur T.J. Willmore pour ses utiles suggestions et remarques concernant la première version de ce travail.

Références

[1] W. Ambrose et I.M. Singer, On homogeneous Riemannian manifolds, Duke Math. J. 25 (1958) 647–669.

[2] P.M. Gadéa et J.A. Oubinã, Homogeneous pseudo-Riemannian structures and homogeneous almost para-Hermitian structures, Houston J. Math. 18 (1992) 449–465.

[3] S. Rahmani, Métriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires de dimension 3, J. Geom. Phys. 9 (1992) 295–302.

[4] F. Tricerri et L. Vanhecke, *Homogeneous Structures on Riemannian Manifolds*, Lecture Notes Series London Math. Soc., Vol. 83 (Cambridge Univ. Press, 1983).

[5] E.N. Wilson, Isometry groups on homogeneous nilmanifolds, Geom. Dedic. 12, 337–346.